

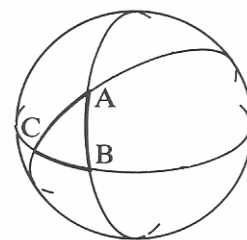
# Sfærisk geometri

## 26. Sfæriske trekanter<sup>1</sup>

Den sædvanlige plangeometri handler, som navnet antyder, om geometri på en »plan« flade. Som model af den virkelige verden er plangeometrien udmærket, blot man holder sig indenfor et begrænset område på jordkloden.

Hvis man beskæftiger sig med geometriske opgaver i mere global målestok, duer plangeometrien ikke. En bedre model af virkeligheden har man da i den *sfæriske geometri*, der handler om geometri på en kugleflade. Vi skal i dette kapitel bl.a. beskæftige os med nogle af de grundlæggende begreber fra den sfæriske trigonometri, trekantsberegning på en kugleflade.

I plangeometrien er de grundlæggende begreber punkt og linje. De tilsvarende begreber i den sfæriske geometri er *punkt* og *storcirkel*. En storcirkel er en cirkel, som fremkommer ved en skæring af kuglefladen med en plan, der går gennem kuglens centrum. Som eksempel på en storcirkel kan man tænke på ækvator på jordkuglen.



Figur 26.1.

En trekant ABC, der afgrænses af storcirkelbuer, kaldes en *sfærisk trekant*, se figur 26.1. Vi vil kun betragte sfæriske trekanter, hvor alle sider og vinkler er mindre end  $180^\circ$ .

### 26.2 EKSEMPEL

Et fundamentalt begreb i plangeometrien er »parallelle linjer«. To linjer siges som bekendt at være parallelle, såfremt de ikke skærer hinanden.

Betragter vi to storcirkler, ser vi, at de altid vil skære hinanden i to punkter (der ligger diametralt modsat på kuglefladen). Begrebet »parallelle linjer« har altså ingen mening i den sfæriske geometri.

I det følgende betragter vi en kugleflade med radius  $r$ . Lad os minde om, at overfladearealet af kuglen er  $F = 4\pi r^2$ . *Vinklen* mellem to storcirkler defineres som vinklen mellem de to planer, der frembringer storcirklerne. Den *sfæriske afstand* mellem to punkter A og B defineres som buelængden af den mindste af de to storcirkelbuer, der går mellem A og B. Den sfæriske afstand kan angives i enten grader eller radianer.

<sup>1</sup> Jonny Schultz: *Matematik højniveau 1*, Trip 1994, s. 102.

# Arealet af en sfærisk trekant m.m.

Tillæg til side 103 – 104 i *Matematik højniveau 1* fra TRIP, af Erik Vestergaard,  
<http://www.matematiksider.dk/sfaere.html>

## Sfærisk tokant

Givet en kugle. En plan, der passerer igennem kuglens centrum, skærer kuglen i en såkaldt *storcirkel*. To forskellige storcirkler på kuglen afgrænser en *sfærisk tokant*. Den sfæriske tokant har to hjørner  $P$  og  $P'$ , som er *antipodiske* i forhold til hinanden, dvs.  $P$  og  $P'$  ligger diametralt modsat på kuglen. Per definition er hjørnernes vinkler  $P$  og  $P'$  lig med vinklen mellem de to planer, som indeholder omtalte storcirkler. Hvis man tegner en ”ækvator” ind på kuglen, dvs. en storcirkel, så  $P$  og  $P'$  bliver ”nordpol” og ”sydpol” i forhold hertil, så er vinkel  $P$  (= vinkel  $P'$ ) lig med vinklen mellem vektorerne  $\overrightarrow{OA}$  og  $\overrightarrow{OB}$ , jævnfør figur 1 (Overvej hvorfor!). Vinkel  $P$  er i øvrigt også lig med vinklen mellem tangenterne til storcirklerne i punktet  $P$ : Se figur 2, hvor man kigger på kuglen fra en position ”lodret” over punkt  $P$  – så  $P$  og  $P'$  ser ud til at falde sammen.

Tokanten er det skraverede område. Det er da ret klart, at *tokantens areal må forholde sig til hele kuglens areal som vinklen  $P$  forholder sig til 360 grader*. Hvis hele kuglens areal betegnes  $F = 4\pi r^2$ , hvor  $r$  er cirkelns radius, så må tokantens areal være lig med følgende:

$$(1) \quad a(PAP'B) = \frac{P}{360^\circ} F$$

## Sfærisk trekant

Hvis man ”cutter” en kugle med tre planer, der alle passerer igennem kuglens centrum, så frembringes i alt 8 *sfæriske trekanter*, som vi jævnfør figur 3 kan betegne:

$$(2) \quad \begin{array}{ll} ABC & A'B'C' \\ A'BC & AB'C' \\ ABC' & A'B'C \\ A'BC' & AB'C \end{array}$$

Til højre for hver sfærisk trekant i venstre søjle står den tilhørende ”antipodiske trekant”: Hjørnerne i den antipodiske trekant til en given trekant fås ved at udskifte hvert hjørne i den oprindelige trekant med det tilsvarende antipodiske punkt. Antipodiske trekanter er i øvrigt *kongruente*, dvs specielt har de samme areal.

Bemærk, at alle de sfæriske trekanter i første søjle alle har  $B$  som hjørne. Se på figur 3: De fire trekanter udgår alle fra  $B$  og danner tilsammen en halvkugle, nemlig alle trekanterne ”over” den plan, som indeholder punkterne  $A$ ,  $C$ ,  $A'$  og  $C'$ . Summen af arealerne af trekanterne i venstre søjle er altså  $\frac{1}{2}F$ .

## Areal af sfærisk trekant

Vi er interesseret i at bestemme arealet af den sfæriske trekant  $ABC$ . Dertil viser det sig fornuftigt først at se på alle de sfæriske tokenanter, som indeholder trekant  $ABC$ . Der er tale om følgende sfæriske tokenanter, jævnfør figur 3:

$$ABA'C \quad CAC'B \quad BAB'C$$

Vinklerne i de tre tokenanter er henholdsvis  $A, C$  og  $B$ . Tokenaternes samlede areal er derfor ifølge (1) ovenfor:

$$\begin{aligned} (3) \quad & a(ABA'C) + a(CAC'B) + a(BAB'C) \\ &= \frac{A}{360^\circ} F + \frac{C}{360^\circ} F + \frac{B}{360^\circ} F = (A+B+C) \frac{F}{360^\circ} \end{aligned}$$

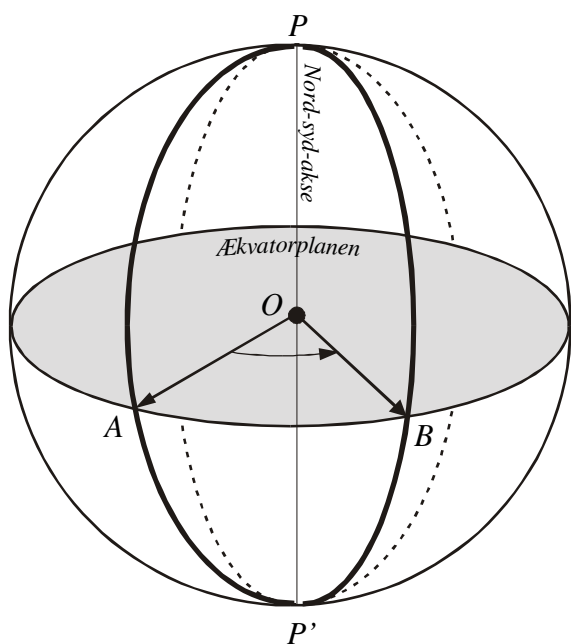
Vi skal finde et andet udtryk for det samme areal. Hver tokant kan splittes op i to trekanter. Tokant  $ABA'C$  kan for eksempel splittes op i trekanterne  $ABC$  og  $A'BC$  (bemærk systemet!). Alt i alt kan de tre tokenanter splittes op i følgende 6 trekanter:

$$ABC \quad A'BC \quad ABC \quad ABC' \quad ABC \quad AB'C$$

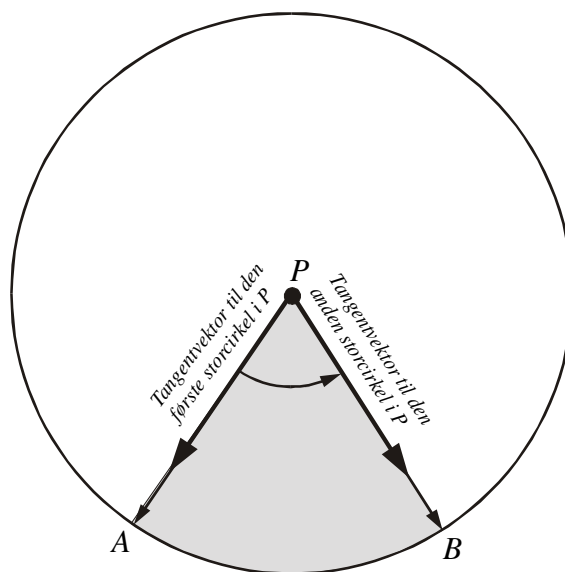
For det første er der tre styk af trekant  $ABC$ . Dernæst er der ét styk af alle de øvrige trekanter på den "øvre halvkugle" (halvkugle "over" storcirklen  $ACA'C'$ ) *undtagen* trekant  $A'BC'$ . Til gengæld er der en anden trekant, nemlig  $AB'C$ . Imidlertid er  $A'BC'$  og  $AB'C$  hinandens antipodiske, så de er kongruente og har samme areal. Så vi kan uden videre udskifte trekant  $AB'C$  med  $A'BC'$  uden at det ændrer på det samlede areal. Efter udskiftningen har vi altså ét styk af hver af trekanterne på den "øvre" halvkugle samt to ekstra dubletter af trekant  $ABC$ . Da arealet af en halvkugle er  $\frac{1}{2}F$ , får vi nu et nyt udtryk for tokenaternes samlede areal:  $2 \cdot a(ABC) + \frac{1}{2}F$ . Sættes dette udtryk lig med (3) får vi:

$$\begin{aligned} (4) \quad & 2 \cdot a(ABC) + \frac{1}{2}F = (A+B+C) \frac{F}{360^\circ} \\ & \Updownarrow \\ & a(ABC) = (A+B+C-180^\circ) \frac{F}{720^\circ} \end{aligned}$$

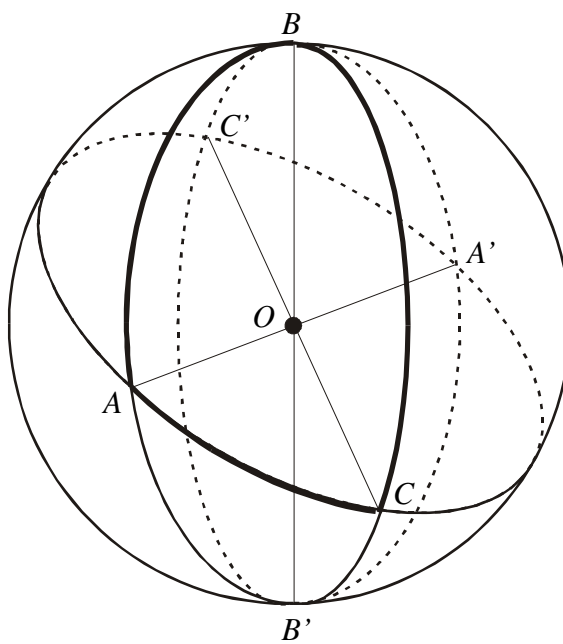
**Figur 1**



**Figur 2**



**Figur 3**



## 26.7 SÆTNING <sup>2</sup>

En sfærisk trekant har arealet

$$a = (A + B + C - 180) \frac{F}{720}$$

hvor A, B og C betegner vinklernes gradtal, og  $F = 4\pi r^2$  er kuglefladens areal.

Sætning 26.7 viser en meget central forskel mellem den geometri, der gælder i planen, og den, der gælder på en kugleflade. Vinkelsummen i en plan trekant er som bekendt  $180^\circ$ . Da arealet af en sfærisk trekant er større end 0, får vi af sætning 26.7:

$$A + B + C - 180 > 0 \Leftrightarrow A + B + C > 180$$

I en sfærisk trekant er vinkelsummen altså altid *større end*  $180^\circ$ . Forskellen  $A + B + C - 180$  mellem vinkelsummen og  $180^\circ$  kaldes trekantens *sfæriske excès*.

### 26.8 ØVELSE

Genopfrisk beviset for, at vinkelsummen i en plan trekant er  $180^\circ$ . Hvorfor kan beviset ikke bruges for en sfærisk trekant?

### 26.9 ØVELSE

Tegn en kugle, og tegn på denne en storcirkel som ækvator.

Tegn dernæst to nord-sydgående storcirkler. De afgrænser en sfærisk trekant på den øverste halvkugle, med grundlinjen på ækvator.

Hvor store er vinklerne ved grundlinjen?

Kan man tegne en sfærisk trekant med tre rette vinkler?

Hvor stor kan vinkelsummen i den betragtede type af sfæriske trekanter højst blive?

Man kan vise, at der for en vilkårlig sfærisk trekant gælder, at  $A + B + C < 540^\circ$ . Tegn en sfærisk trekant, hvis vinkelsum er tæt på denne øvre grænse.

---

### Ekstra øvelser

- 1) Givet en kugle med radius  $r = 2$ . Bestem arealet af en sfærisk trekant med vinkler  $A = 108^\circ$ ,  $B = 37^\circ$  og  $C = 89^\circ$ .
- 2) Givet en kugle med radius  $r = 1$ . Bestem arealet af en sfærisk trekant med vinkelsummen  $360^\circ$  (udtrykt ved  $\pi$ ).
- 3) Givet en kugle med radius  $r = 1$ . Hvad er grænseværdien for arealet af en sfærisk trekant, når vinkelsummen går mod  $540^\circ$  (udtrykt ved  $\pi$ )?
- 4) Hvor mange gange større bliver arealet af en sfærisk trekant, hvis kuglens radius:
  - fordobles?
  - tredobles?

/CT

---

<sup>2</sup> Jonny Schultz: *Matematik højniveau 1*, Trip 1994, s. 104.

## 27. Sfæriske koordinater<sup>3</sup>

Ved positionsangivelser på en kugleflade kan man benytte *sfæriske koordinater*. De svarer i princippet til et punkts længde og bredde, som vi kender det ved positionsangivelser på jordklode.

Kuglen anbringes i et sædvanligt koordinatsystem som vist på figur 27.1. Storcirklen bestemt ved  $xy$ -planen skal svare til ækvator. Langs denne måles vinklen  $\varphi$  (phi) med fortegn, så  $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ . Tilsvarende måles vinklen  $\theta$  (theta) mellem  $-90^\circ$  og  $90^\circ$ , idet der regnes positivt på den nordlige halvkugle. Talsættet  $(\varphi, \theta)$  kaldes de sfæriske koordinater for punktet P. For nordpolen og sydpolen gælder henholdsvis  $\theta = 90^\circ$  og  $\theta = -90^\circ$ , mens  $\varphi$  kan vælges vilkårligt.

Omsætningen mellem sfæriske koordinater  $(\varphi, \theta)$  og sædvanlige koordinater  $(x, y, z)$  foregår på følgende måde. Vi antager, at kuglen har radius  $r$ . Længden af OQ er lig med  $r \cos \theta$ . Af trekkanterne på figuren ser vi, at der gælder

$$x = r \cos \theta \cos \varphi$$

**27.2**  $y = r \cos \theta \sin \varphi$

$$z = r \sin \theta$$

Af disse ligninger kan  $(x, y, z)$  bestemmes, hvis  $r$  og  $(\varphi, \theta)$  er kendt. Hvis  $(x, y, z)$  er givet, kan vi først beregne  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  og dernæst bestemme  $(\varphi, \theta)$  af (27.2). Vi viser et eksempel på dette.

### 27.3 EKSEMPEL

Et punkt på en kugleflade har koordinater  $(x, y, z) = (3, 4, 12)$ . Vi vil bestemme kuglens radius og punktets sfæriske koordinater. Vi får først:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

Af ligningen  $z = r \sin \theta$  får vi  $\sin \theta = \frac{12}{13}$ , hvilket giver  $\theta = 67,38^\circ$ .

Endvidere ser vi, at  $\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$ , og heraf får vi  $\varphi = 53,13^\circ$ .

Punktets sfæriske koordinater er altså

$$(\varphi, \theta) = (53,13^\circ ; 67,38^\circ)$$

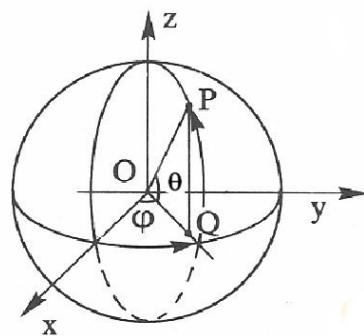
### 27.4 ØVELSE

Bestem koordinater  $(x, y, z)$  til punkterne med følgende sfæriske koordinater, idet kuglens radius er 5. Illustrer punkternes beliggenhed på kuglen.

$$A(15^\circ, 50^\circ) \quad B(-40^\circ, 35^\circ) \quad C(75^\circ, -25^\circ)$$

### 27.5 ØVELSE

Bestem de sfæriske koordinater for punktet  $(3, -4, 6)$ .



Figur 27.1.

<sup>3</sup> Jonny Schultz: *Matematik højniveau 1*, Trip 1994, s. 105-106øverst.

# Sfæriske koordinater til rektangulære koordinater

Tillæg til side 105 i *matematik højniveau 1* fra TRIP. Af Erik Vestergaard,  
<http://www.matematiksider.dk/sfaere.html>

Punktet  $Q$  ligger lodret under punktet  $P$  i  $xy$ -planen. Bemærk, at  $\varphi$  er den vinkel, som  $\overrightarrow{OQ}$  er drejet i forhold til  $x$ -aksen. Vinklen  $\varphi$  regnes i intervallet  $]-180^\circ; 180^\circ]$  og regnes positiv over mod  $y$ -aksen og negativ den modsatte vej. Vinklen  $\theta$  er den "lodrette vinkel", dvs. den vinkel, som  $\overrightarrow{OP}$  ligger over  $\overrightarrow{OQ}$ . Vinklen regnes i intervallet  $[-90^\circ; 90^\circ]$ : positiv, når  $\overrightarrow{OP}$  ligger over  $xy$ -planen og negativ, når  $\overrightarrow{OP}$  ligger under  $xy$ -planen.

Vi skal nu se på omsætningen mellem sfæriske og rektangulære koordinater: Helt præcist skal vi givet et punkt  $P$  med de sfæriske koordinater  $(\varphi, \theta)$  finde hvad det svarer til i rektangulære koordinater  $(x, y, z)$ . Betragt det tredimensionale billede af situationen på figur 1: Punktet  $Q$  fås ved at projicere  $P$  ned i  $xy$ -planen. På figur 2 ser jeg specielt på trekanten  $OPQ$ . Vi finder nemt længden af linjestykket  $OQ$ :

$$(2a) \quad \sin(\theta) = \frac{z}{r} \quad \Leftrightarrow \quad z = r \cdot \sin(\theta)$$

$$(2b) \quad \cos(\theta) = \frac{|OQ|}{r} \quad \Leftrightarrow \quad |OQ| = r \cdot \cos(\theta)$$

På tilsvarende måde fås af figur 3, hvor situationen er set oppefra:

$$(3a) \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{|OQ|} \quad \Leftrightarrow \quad x = |OQ| \cdot \cos(\varphi)$$

$$(3b) \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{|OQ|} \quad \Leftrightarrow \quad y = |OQ| \cdot \sin(\varphi)$$

Indsættes (2b) i (3a) og (3b) fås

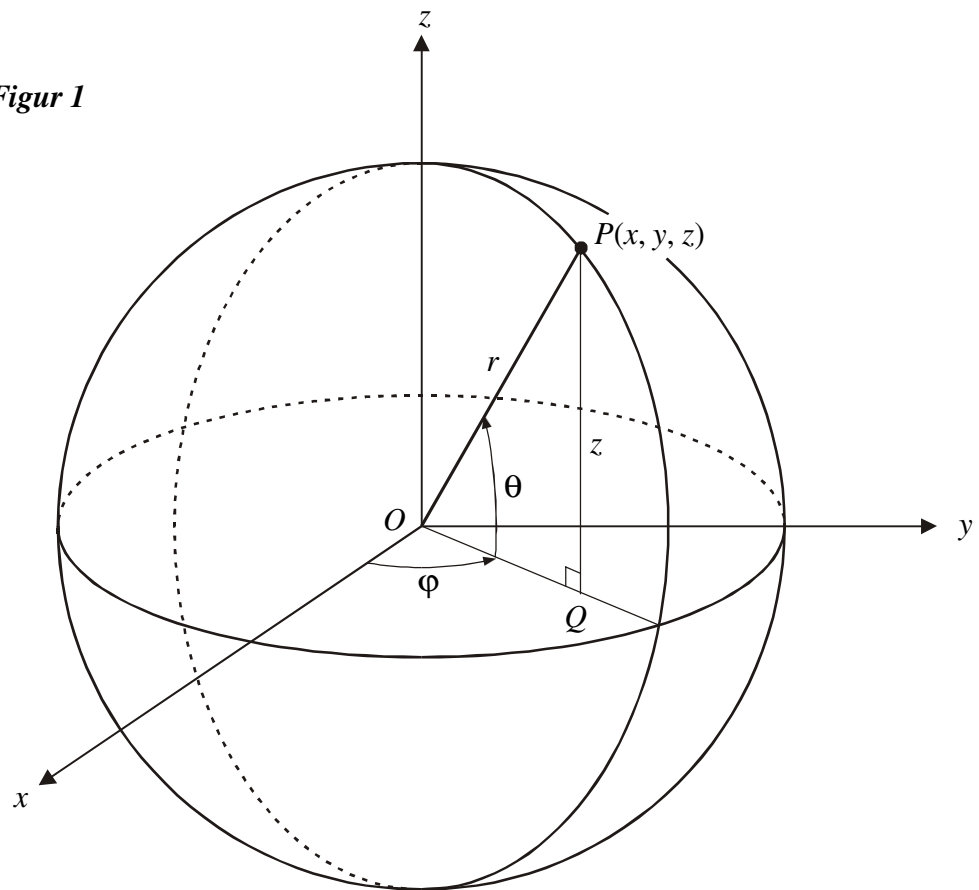
$$(4) \quad x = |OQ| \cdot \cos(\varphi) = r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$(5) \quad y = |OQ| \cdot \sin(\varphi) = r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)$$

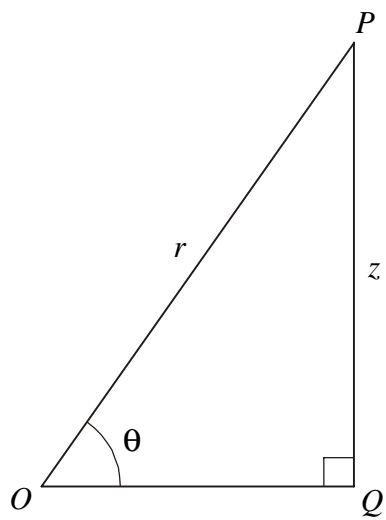
Sammen med (2a) giver (4) og (5) udtrykkene for de tre koordinater  $x$ ,  $y$ , og  $z$ .  
I øvrigt er radius givet ved

$$(6) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

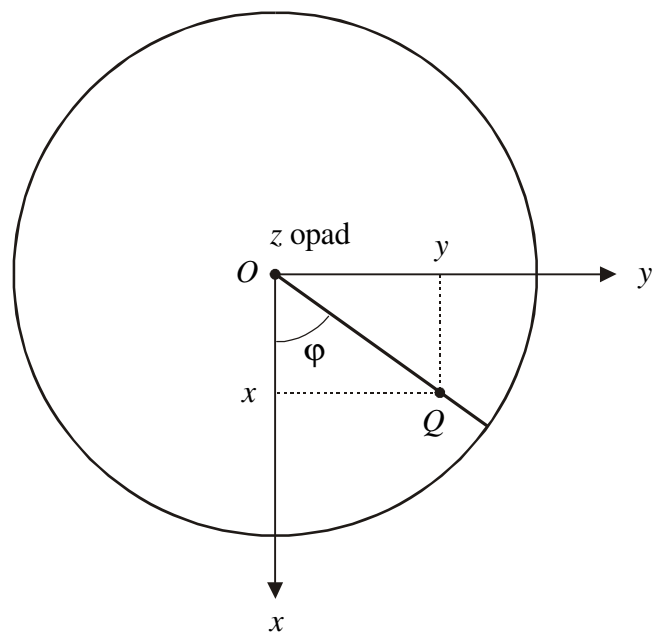
**Figur 1**



**Figur 2**



**Figur 3**



## 28. Sfærisk trigonometri<sup>3</sup>

Grundlaget for trekantsberegning på kuglefladen er et sæt formler, der kaldes cosinusrelationerne. For at udlede disse betragter vi en sfærisk trekant  $ABC$  anbragt på en kugleflade med radius  $r$ , se figur 28.1. Buelængderne for trekantens sider betegnes  $a$ ,  $b$  og  $c$ , og vi vil her måle dem i grader.

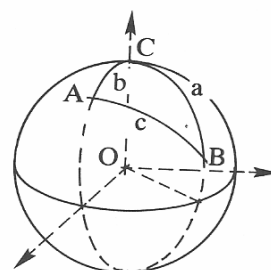
[se bevis på sidste sider]

### 28.3 COSINUSRELATIONER FOR SFÆRISK TREKANT

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$



Figur 28.1.

### 28.4 EKSEMPEL

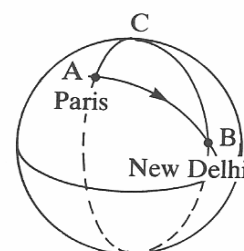
Paris og New Delhi har sfæriske koordinater  $A(2,3^\circ; 48,8^\circ)$  og  $B(77,2^\circ; 28,6^\circ)$ . Den korteste vej for en non-stop flyvning er langs storcirklen gennem  $A$  og  $B$ . Vi vil beregne afstanden  $AB$ , den kurs, man skal starte med fra Paris, og den kurs, man flyver, når man nærmer sig New Delhi, se figur 28.5.

Af de givne oplysninger fås

$$a = 61,4^\circ$$

$$b = 41,2^\circ$$

$$C = 74,9^\circ$$



Figur 28.5.

Buen  $c$  findes ved hjælp af cosinusrelationer

$$\cos c = \cos 61,4^\circ \cos 41,2^\circ + \sin 61,4^\circ \sin 41,2^\circ \cos 74,9^\circ$$

Heraf fås  $c = 59,3^\circ$ . Sætter vi jordens radius til 6370 km, får vi afstanden  $AB$  til

$$AB = 2\pi r \frac{59,3}{360} = 6590 \text{ km}$$

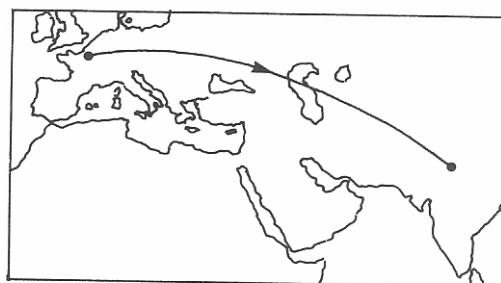
Startkursen er lig med vinkel  $A$ . Vi benytter den nederste af formlerne i (28.3)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Indsættes tallene fås  $A = 80,4^\circ$ . Denne kurs kan nok virke lidt overraskende, da New Delhi ligger ca.  $20^\circ$  sydligere end Paris. På tilsvarende måde findes vinkel  $B$  til  $B = 47,7^\circ$ .

Kursen ved slutningen af flyveturen er altså  $90^\circ + 47,7^\circ = 137,7^\circ$ .<sup>4</sup>

Indtegnes storcirkelruten på et sædvanligt landkort, bliver resultatet som vist på figur 28.6. Tilsyneladende flyver man en omvej, men det er altså den korteste rute.



Figur 28.6.

<sup>3</sup> Jonny Schultz: *Matematik højniveau 1*, Trip 1994, s. 106-110.

<sup>4</sup> CT: Dette må være en fejl. Kursen er  $180^\circ - 47,7^\circ = 132,3^\circ$ .

Ud fra (28.3) kan man udlede et sæt formler, der svarer til plangeometriens sinusrelationer.

## 28.7 SINUSRELATIONER FOR SFÆRISK TREKANT

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

(...)

Vi vil afslutte med nogle formler vedrørende retvinklede sfæriske trekanter.

## 28.9 ØVELSE

Lad  $ABC$  være en retvinklet sfærisk trekant med  $C = 90^\circ$ . Vis, at der gælder

$$1) \cos c = \cos a \cos b$$

$$2) \sin A = \frac{\sin a}{\sin c} \text{ og } \sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$$

Af cosinusrelationerne for  $\cos a$  får vi

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Hvis  $C = 90^\circ$ , gælder ifølge (28.9), at  $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$ , og vi får da

$$\cos A = \frac{\frac{\cos c}{\cos b} - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos c - \cos^2 b \cos c}{\cos b \sin b \sin c} = \frac{\cos c \sin^2 b}{\cos b \sin b \sin c} = \frac{\tan b}{\tan c}.$$

En analog formel gælder for  $\cos B$ , så vi har

$$28.10 \quad \text{Hvis } C = 90^\circ \text{ så er } \cos A = \frac{\tan b}{\tan c} \text{ og } \cos B = \frac{\tan a}{\tan c}.$$

Ved hjælp af (28.9) og (28.10) kan man foretage beregninger i en retvinklet sfærisk trekant. Vi viser et eksempel.

## 28.11 EKSEMPEL

I en sfærisk trekant er  $C = 90^\circ$ ,  $a = 62,3^\circ$  og  $B = 34,7^\circ$ . Vi vil beregne de ukendte stykker.

Af (28.10) får vi

$$\tan c = \frac{\tan a}{\cos B} \Rightarrow c = 66,7^\circ$$

Herefter benyttes (28.9)

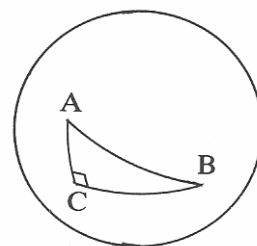
$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a} \Rightarrow b = 31,5^\circ$$

Villkel  $A$  kan nu findes af

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} \Rightarrow A = 74,7^\circ$$

Hermed er opgaven løst. Vinkelsummen i den pågældende trekant er

$$A + B + C = 74,7^\circ + 34,7^\circ + 90,0^\circ = 199,4^\circ.$$



Figur 28.12.

## 28.13 ØVELSE

I nedenstående sfæriske trekanter er  $C = 90^\circ$ . Beregn de ukendte sider og vinkler samt vinkelsummen.

$$1) a = 53,2^\circ ; b = 17,4^\circ \quad 2) a = 37,3^\circ ; A = 43,9^\circ$$

# Beviser for cosinus- og sinusrelationerne

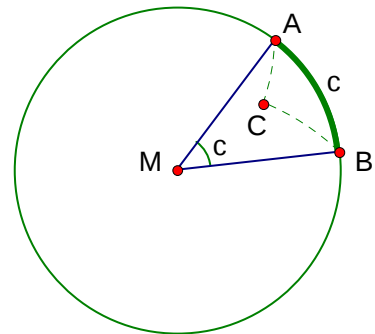
## Generelt

I beviserne for cosinus- og sinusrelationerne for en sfærisk trekant, anvendes bla. følgende:

$$\begin{aligned}\cos^2 v + \sin^2 v &= 1 \\ \cos(90^\circ - v) &= \sin v \\ \sin(90^\circ - v) &= \cos v\end{aligned}$$

Bemærk at buelængder, dvs. trekantens sider, ikke måles i almindelige længdeenheder, men i grader.

Det betyder, at størrelsen af buen  $AB$  er lig størrelsen af den vinkel  $c$  ved kuglens centrum  $M$ , som buen spænder over.



## Bevis for cosinusrelationerne

Vi vælger et koordinatsystem, så punktet  $C$  er sammenfaldende med nordpolen, og så storcirklen gennem  $A$  og  $C$  går gennem  $x$ -aksen. Så får punkterne  $A$  og  $B$  følgende sfæriske koordinater:

$$A: (\varphi, \theta) = (0^\circ, 90^\circ - b)$$

$$B: (\varphi, \theta) = (C, 90^\circ - a)$$

får stedvektorerne  $\overrightarrow{OA}$  og  $\overrightarrow{OB}$  nedenstående rektangulære koordinater  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(90^\circ - b) \cos 0^\circ \\ r \cos(90^\circ - b) \sin 0^\circ \\ r \sin(90^\circ - b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin b \\ 0 \\ r \cos b \end{pmatrix}$$

og

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(90^\circ - a) \cos C \\ r \cos(90^\circ - a) \sin C \\ r \sin(90^\circ - a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin a \cos C \\ r \sin a \sin C \\ r \cos a \end{pmatrix}$$

Længderne af stedvektorerne er naturligvis lig kuglens radius  $r$ .

Vi udregner nu skalarproduktet af de to stedvektorer på to forskellige måder:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos c = r^2 \cos c$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} r \sin b \\ 0 \\ r \cos b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \sin a \cos C \\ r \sin a \sin C \\ r \cos a \end{pmatrix} = r^2 \sin a \sin b \cos C + r^2 \cos a \cos b$$

De to udtryk kombineres nu i en ligning:

$$\begin{aligned} r^2 \cos c &= r^2 \sin a \sin b \cos C + r^2 \cos a \cos b \\ \Leftrightarrow \cos c &= \sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b \end{aligned}$$

Tilsvarende formler kan fås for  $\cos a$  og  $\cos b$  ved at vælge andre koordinatsystemer.

### **Bevis for sinusrelationerne**

Beviset tager udgangspunkt i to sande udsagn. Det første er cosinusrelationen for  $\cos c$ , som omskrives:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \\ \Leftrightarrow \sin a \sin b \cos C &= \cos c - \cos a \cos b \\ \Leftrightarrow \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 C &= (\cos c - \cos a \cos b)^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 C &= \cos^2 c + \cos^2 a \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c \quad (1) \end{aligned}$$

Den anden er:

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C = \sin^2 a \sin^2 b (1 - \cos^2 C) = \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 C. \quad (2)$$

Næste skridt er at indsætte (1) som sidste led i (2), altså at kombinere de to sande udsagn:

$$\begin{aligned} \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C &= \sin^2 a \sin^2 b - (\cos^2 c + \cos^2 a \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c) \\ &= \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \cos c \\ &= (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) - \cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \cos c \\ &= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \cos c \\ &= 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2 \cos a \cos b \cos c \end{aligned}$$

Det specielle ved det sidste udtryk er, at det beholder samme værdi, hvis siderne  $a$ ,  $b$  og  $c$  ombyttes. Det samme må så gælde for  $\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C$ , og derfor har vi:

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C = \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \sin^2 c \sin^2 a \sin^2 B.$$

Da sinus er positiv intervallet  $]0^\circ; 180^\circ[$ , gælder sluttelig:

$$\begin{aligned} \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C &= \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \sin^2 c \sin^2 a \sin^2 B \\ \Leftrightarrow \sin a \sin b \sin C &= \sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B \\ \Leftrightarrow \frac{\sin a \sin b \sin C}{\sin a \sin b \sin c} &= \frac{\sin b \sin c \sin A}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{\sin c \sin a \sin B}{\sin a \sin b \sin c} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin C}{\sin c} &= \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} \end{aligned}$$